10-12-20

- **Δυναμοσειρά:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R$

- **Δυναμοσειρά Taylor:** f όλες τις παραγώγους στο J , $x_0 \in J$
με $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$

- **Παράδειγμα:** $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} \cdot \sup|f^n(x)| = 0 \longrightarrow$ f συγκλίνει στο f(x), $x\in J$, $|x-x_0|<r$.

- **Πολυώνυμα (παράδειγμα):**
Έστω $p(x)=4x^3-5x^2+7x+1$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, με $a_0=1, a_1=7, a_2=-5, a_3=4$ $[a_{4+k}=0 , k=0,\dots]$

Για $x_0=1$: $p(x)=4[(x-1)+1]^3-5[(x-1)+1]^2+7[(x-1)+1]+8$
$\Rightarrow p(x)= a_3(x-1)^3+a_2(x-1)$?

- **Κάποιες Δυναμοσειρές:**
(i) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$.

(ii) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$

(iii) $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

(iv) $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\odot + a^2}$

Πx **Παράδειγμα:**
$f(x)=\sin x$, μία τριγωνομετρική συνάρτηση.
Βρίσκω τις παραγώγους:

$f(x)=\sin x$
$f'(x)=\cos x$
$f''(x)=-\sin x$
$f'''(x)=-\cos x$
$f^{(4)}(x)=\sin x$
$f^{(5)}(x)=f^{(4n+1)}(x)=\dots$

Για $x_0=0$:
$f^{(4n)}(0)=0$
$f^{(4n+1)}(0)=0$
$f^{(4n+2)}(0)=0$
$f^{(4n+3)}(0)=0$

Επομένως, $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\cdot(x-x_0)^n}{n!}$

$f'(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n\right]'=\sum_{\substack{n=1\\n=0}}^{\infty}c_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1},\ |x-x_0|<R$

$\hookrightarrow [c_0+c_1\cdot(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2\dots]$

- $\int_a^x f(s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot\int_a^x (s-x_0)^n\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot\frac{(s-x_0)^{n+1}}{n+1}\Big|_{s=a}^{s=x}$

- Σημείωση:

Εστω $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\cdot(x-x_0)^n,\ |x-x_0|<R_1$

Εστω $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n\cdot(x-x_0)^n,\ |x-x_0|<R_2$

$R=\min\{R_1,R_2\}$

$\Rightarrow k\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(k\cdot p_n+\lambda\cdot q_n)\cdot(x-x_0)^n$

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(x-x_0)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}d_n\cdot(x-x_0)^n\right]=$

$[c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\dots]\ [d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)^2+\dots$

$=c_0d_0+(c_0d_1+d_0c_1)\cdot(x-x_0)+[c_2d_0+c_1d_1+c_0d_2]\cdot(x-x_0)^2+\dots$

• **Παράδειγμα:** $a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ $\to$ (E), $t\in I$, $a_{0,1,2}\in C(I)$, $a_2(t)\neq 0$
$t_0\in I$, $a_2(t_0)\neq 0$.
Υπόθεση: $\dfrac{a_1(t)}{a_2(t)}$, $\dfrac{a_0(t)}{a_2(t)}$: αναλυτικές στο t_0.
$\sum p_n\cdot(x-x_0)^n$ $\qquad$ $\sum q_n\cdot(x-x_0)^n$.
t_0 ομαλό σημείο της (E).

Πx **Παράδειγμα:** $\underbrace{(1+t^2)}_{a_2}y'' + \underbrace{3t}_{a_1}y' + \underbrace{5}_{a_0}y = 0$, $t\in\mathbb{R}$, $a_2(t)\neq 0$ $\forall t_0\in\mathbb{R}$

• $\dfrac{3t}{1+t^2}$, $\dfrac{5}{1+t^2}$ αναλυτικές $\forall t\in\mathbb{R}$

$(1-t^2)y'' + 3ty' + 5y = 0$ // $t=1,-1$ ανώμαλα σημεία.

Πx **Παράδειγμα:** $t^2y'' + |t-1|y' + 5y = 0$, $t=0$, $t=1$.
$\dfrac{a_1(t)}{a_2(t)} = \dfrac{|t-1|}{t^2}$: όχι αναλυτική στο $t=1$.

Πx **Παράδειγμα:** $\underset{1,-1}{|t^2-1|}y'' + \underset{7,\ t\geq 7}{\sqrt{t-7}}\,y' + 3t^3y = 0$ (E)

Θεώρημα 1.: Έστω $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = 0$ (E), $x_0\in I$ ομαλό σημείο.
Ας θεωρήσουμε ένα ομαλό σημείο x_0 της δ.ε. (E) και ας είναι $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$ δύο δυναμοσειρές με θετικές ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2 αντίστοιχα έτσι ώστε:
$\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$ για $|x-x_0|<R_1$ και

$\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$ για $|x-x_0|<R_2$.

Ακόμα, ας είναι $R=\min\{R_1,R_2\}$.
Ας είναι c_0 και c_1 δύο σταθερές.
Τότε, υπάρχουν c_n $(n=2,3,\dots)$ έτσι ώστε:

η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n$ να έχει μία (θετική) ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη ή ίση του R και η συνάρτηση:

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n$ για $|x-x_0|<R$

να είναι λύση της δ.ε. (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες:
$y(x_0)=c_0$ και $y'(x_0)=c_1$.

- **Εφαρμογή:** $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ (Ε), $x_0 \in I$ ομαλό σημείο.

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$, $x_0=0$.

$$\Rightarrow \underbrace{a_2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2} + a_1(x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot x^{n-1} + a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = 0}_{\sum_{n=a}^{\infty} (\_) \cdot x^n = 0, \ |x|<R}$$

$\hookrightarrow 0.$

$$\Rightarrow x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=5}^{\infty} c_{n-4} \cdot (n-4) \cdot x^{n-5}$$

- **Εφαρμογή:** $\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot x^n = d_0 + d_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n + d_n) \cdot x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot x^n = d_0 + d_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} d_n \cdot x^n$$

με $d_0=0$, $d_1=0$ και $c_n+d_n=0$, $n \geq 2$.
επίσης, $\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot x^n = 0$.

$\underset{0}{\bigcirc} + \underset{0}{\bigcirc} x + \underset{0}{\bigcirc} x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \boxed{}\, x^n = 0$, $n \geq 3$

αυτό είναι $f(c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_{n+k}) = 0$.

$c_{n+k} = A_{n+k-1} c_{n+k-1} + \dots + A_n \cdot c_n$

- $c_{n+1} = A c_n$, $n \geq 1$

$\cancel{c_2} = A c_1$

$\cancel{c_3} = A \cancel{c_2}$, $c_n = A c$

$c_n = A c_{n+1}$

$c_{n+2} = A c_n, \quad n \geq 1$

$c_3 = A c_1$

$\vdots$

$c_5 = A \cancel{c_3}$

$c_7 = A \cancel{c_5}$

$\vdots$

$c_{2n+1} = A \cancel{c_{2n-1}}$

$\Big\}\ c_{2n+1} = A c_1$

$c_{2n} = A c_2$

$\Big\{$

$c_4 = A c_2$

$c_6 = A \cancel{c_4}$

$c_8 = A \cancel{c_6}$

$\vdots$

$c_{2n} = A \cancel{c_{2(n-1)}}$

(Πx) **Άσκηση 1iii, σελ. 218:** $y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Λύση: $a_2(x) = 1,\ a_1(x) = -2x,\ a_0(x) = 2$

$a_2(0) \neq 0: \ \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} = \dfrac{-2x}{1}, \ \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)} = \dfrac{2}{1} = 2$

Επομένως, $R_1 = \infty,\ R_2 = \infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = y(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Οπότε, συνεχίζουμε και φτιάχνουμε την εξίσωση με δυναμοσειρές:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{\boxed{n-2}} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot c_n \cdot x^{\boxed{n}} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n \cdot x^{\boxed{n}} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \cdot (n+2)(n+1) \cdot x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot c_n \cdot n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n \cdot x^n = 0$$

$$\Rightarrow c_2 \cdot 2 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+2} \cdot (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot c_n \cdot n \cdot x^n + 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot c_n \cdot x^n = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{2c_2 + 2c_0}_{} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[c_{n+2}(n+2)(n+1) - 2n \cdot c_n + 2c_n\right]}_{} \cdot x^n = 0$$

$c_2 = -c_0$ και $c_{n+2}(n+2)(n+1) = (2n-2)c_n, \ n \geq 1$.

$\Rightarrow c_2 = -c_0$ και $c_{n+2} = \dfrac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)} \cdot c_n, \ n \geq 1$.

$c_0=0 \rightsquigarrow c_2=0$ και $c_4=(\ )\,c_2=0$

$c_6=(\ )\,c_4=0$

$\cdots\cdots$

$c_{2n}=0$

$\boxed{c_1=1}$ και $c_3=\dfrac{2(1-1)}{3\cdot 2}c_1=0$

$c_5=(\ )\,c_3=0$

$c_7=(\ )\,c_5=0$

$\cdots\cdots$

$c_{2n+1}=0,\ n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n = c_1 x = x.$$

$$c_{n+2}=\frac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)}c_n,\quad n\geq 1.$$

βήμα 2.

$n=2k,\ k\geq 1 \rightsquigarrow c_{2(k+1)}=\dfrac{2(2k-1)}{(2k+1)(2k+2)}\cdot c_{2k},\quad k\geq 1.$

$k=1:\ c_4=\dfrac{2(2\cdot 1-1)}{(2\cdot 1+1)(2\cdot 1+2)}\cdot c_2=\dfrac{2\cdot 1}{3\cdot 4}\cdot c_2.$

$k=2:\ c_6=\dfrac{2(4-1)}{5\cdot 6}\cdot c_4$

$k=3:\ c_8=\dfrac{2\cdot 5}{7\cdot 8}c_6$

$\vdots$

$k=\ :\ c_{2(k+1)}=\dfrac{2(2k-1)}{(2k+1)(2k+2)}c_{2k}.$

$$c_{2(k+1)}=\frac{2^k[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)]}{[3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)][4\cdot 6\cdot 8\cdots(2k+2)]}\cdot c_2,\quad k\geq 1$$

$$=\frac{2^k}{(2k+1)\cdot[\underbrace{(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdots(2(k+1))}_{k}]}$$

$=2\cdot 2\cdot 3\cdots(k+1)$

$\hookrightarrow (k+1)!$

$$c_{2k+1+2} = \frac{2(2k+1-1)}{(2k+1+2)(2k+1+1)} \cdot c_{2k+1} \;,\; 2k+1 \geq 1 \rightarrow k \geq 0$$

$$c_{2k+3} = \frac{2(2k)}{(2k+3)(2k+2)} \cdot c_{2k+1} \;,\; k \geq 0$$

$$c_{2k+3} = \frac{2k}{(k+1)(2k+3)} c_{2k+1} \;,\; k \geq 0$$

$\downarrow$

$k = 0 \;,\quad c_3 = 0$

$k = 1 \;,\quad c_5 = (\;) \cdot 0 = 0$

$\quad \cdots\cdots$

$\quad c_{2n+1} = 0 \;,\; n \geq 1$

$$y(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \cdot x^{2n}$$